Summation der Progressionen
$\sin^\lambda \varphi + \sin^\lambda 2\varphi + \sin^\lambda 3\varphi + \cdots + \sin^\lambda n\varphi$
$\cos^\lambda \varphi + \cos^\lambda 2\varphi + \cos^\lambda 3\varphi + \cdots + \cos^\lambda n\varphi$ *

Leonhard Euler

§1 Für

$$\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi = p$$

und

$$\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi = q$$

gesetzt ist bekannt, dass

$$\cos n\varphi = \frac{p^n + q^n}{2}$$

und

$$\sin n\varphi = \frac{p^n - q^n}{2\sqrt{-1}}$$

sein wird, dann aber auch, dass $pq = 1$ ist. Es ist klar dass die Summation dieser Reihen immer auf diese zwei Reihen oder geometrische Progressionen

$$p^\alpha + p^{2\alpha} + p^{3\alpha} + \ldots + p^{n\alpha} = \frac{p^{(n+1)\alpha} - p^\alpha}{p^\alpha - 1} = \frac{p^\alpha(1 - p^{n\alpha})}{1 - p^\alpha}$$

$$q^\alpha + q^{2\alpha} + q^{3\alpha} + \ldots + q^{n\alpha} = \frac{q^{(n+1)\alpha} - q^\alpha}{q^\alpha - 1} = \frac{q^\alpha(1 - q^{n\alpha})}{1 - q^\alpha}$$

zurückgeführt werden kann.

---

*Originaltitel: „Summatio progressionum $\sin(\varphi^\lambda) + \sin(2\varphi^\lambda) + \sin(3\varphi^\lambda) + \cdots + \sin(n\varphi^\lambda); \cos(\varphi^\lambda) + \cos(2\varphi^\lambda) + \cos(3\varphi^\lambda) + \cdots + \cos(n\varphi^\lambda)$“, erstmals publiziert in „*Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 18, 1774, pp. 24-36“, Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 15, pp. 168 - 184“, Eneström-Nummer E447, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz“

§2 Wenn daher nun diese beiden Progressionen zueinander addiert werden, sodass diese

$$p^\alpha + p^{2\alpha} + p^{3\alpha} + \cdots + p^{n\alpha} + q^\alpha + q^{2\alpha} + q^{3\alpha} + \ldots + q^{n\alpha}$$

hervorgeht, wird ihre Summe

$$\frac{p^{(n+1)\alpha} - p^\alpha}{p^\alpha - 1} + \frac{q^{(n+1)\alpha} - q^\alpha}{q^\alpha - 1} =$$
$$\frac{p^\alpha - p^{(n+1)\alpha} - p^\alpha q^\alpha + p^{(n+1)\alpha} q^\alpha + q^\alpha - q^{(n+1)\alpha} - p^\alpha q^\alpha + p^\alpha q^{(n+1)\alpha}}{1 - p^\alpha - q^\alpha + p^\alpha q^\alpha}$$

sein, welcher Ausdruck wegen $pq = 1$ in diesen

$$\frac{p^\alpha - p^{(n+1)\alpha} - 1 + p^{n\alpha} + q^\alpha - q^{(n+1)\alpha} - 1 + q^{n\alpha}}{2 - p^\alpha - q^\alpha}$$

verwandelt wird, welcher weiter wegen

$$p^\alpha + q^\alpha = 2\cos\alpha\varphi$$

und

$$p^{(n+1)\alpha} + q^{(n+1)\alpha} = 2\cos(n+1)\alpha\varphi$$

und

$$p^{n\alpha} + q^{n\alpha} = 2\cos n\alpha\varphi$$

auf diese Form reduziert wird

$$\frac{\cos\alpha\varphi - \cos(n+1)\alpha\varphi - 1 + \cos n\alpha\varphi}{1 - \cos\alpha\varphi} = -1 + \frac{\cos n\alpha\varphi - \cos(n+1)\alpha\varphi}{1 - \cos\alpha\varphi},$$

welche also die Summe der vorgelegten Reihe ist.

§3 Wenn aber die eine unserer Progressionen von der anderen abgezogen wird, sodass man diese

$$p^\alpha + p^{2\alpha} + p^{3\alpha} + \cdots + p^{n\alpha} - q^\alpha - q^{2\alpha} - q^{3\alpha} - \cdots - q^{n\alpha}$$

hat, wird ihre Summe

$$\frac{p^{(n+1)\alpha} - p^\alpha}{p^\alpha - 1} - \frac{q^{(n+1)\alpha} - q^\alpha}{q^\alpha - 1}$$

sein, welche Teile auf denselben Nenner gebracht

$$\left\{\begin{array}{l} +p^{\alpha}-p^{(n+1)\alpha}-p^{\alpha}q^{\alpha}+p^{(n+1)\alpha}q^{\alpha} \\ -q^{\alpha}+q^{(n+1)\alpha}+p^{\alpha}q^{\alpha}-q^{(n+1)\alpha}p^{\alpha} \end{array}\right\} : (1-p^{\alpha}-q^{\alpha}+p^{\alpha}q^{\alpha})$$

ergeben werden; wegen $pq = 1$ wird dieser Ausdruck aber auf diesen zurückgeführt

$$\left\{\begin{array}{l} +p^{\alpha}-p^{(n+1)\alpha}-1+p^{n\alpha} \\ -q^{\alpha}+q^{(n+1)\alpha}+1-q^{n\alpha} \end{array}\right\} : (2-p^{\alpha}-q^{\alpha})$$

und weiter wegen

$$p^{\alpha}-q^{\alpha} = 2\sqrt{-1}\sin\alpha\varphi$$

und

$$p^{(n+1)\alpha}-q^{(n+1)\alpha} = 2\sqrt{-1}\sin(n+1)\alpha\varphi$$

und

$$p^{n\alpha}-q^{n\alpha} = 2\sqrt{-1}\sin n\alpha\varphi$$

in diesen Ausdruck verwandelt

$$\frac{\sin\alpha\varphi-\sin(n+1)\alpha\varphi+\sin n\alpha\varphi}{1-\cos\alpha\varphi}\sqrt{-1}.$$

§4 Wir wollen der Kürze wegen die Summen dieser Reihen mit dem letzten oder allgemeinen Term bezeichnen, in dem wir das Summationszeichen $\int$ voranstellen, sodass beide entwickelten Fälle die Summationen

$$\int(p^{n\alpha}+q^{n\alpha}) = -1+\frac{\cos n\alpha\varphi-\cos(n+1)\alpha\varphi}{1-\cos\alpha\varphi}$$

und

$$\int(p^{n\alpha}-q^{n\alpha}) = \frac{\sin\alpha\varphi+\sin n\alpha\varphi-\sin(n+1)\alpha\varphi}{1-\cos\alpha\varphi}\sqrt{-1},$$

liefern, aus welchen Formeln es leicht sein wird, alle vorgelegten Fälle abzuleiten.

§5 Es sei also zuerst $\lambda = 1$, dass man diese zwei Reihen zu summieren hat:

$$s = \sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \ldots + \sin n\varphi$$

oder

$$s = \int \sin n\varphi$$

und

$$t = \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos n\varphi$$

oder

$$t = \int \cos n\varphi;$$

weil also

$$\sin n\varphi = \frac{p^n - q^n}{2\sqrt{-1}}$$

und

$$\cos n\varphi = \frac{p^n + q^n}{2}$$

ist, werden wir

$$2s\sqrt{-1} = \int (p^n - q^n)$$

und

$$2t = \int (p^n + q^n)$$

haben, woher wir aus dem vorhergehenden Paragraphen wegen $\alpha = 1$ sofort

$$2s\sqrt{-1} = \frac{\sin\varphi + \sin n\varphi - \sin(n+1)\varphi}{1 - \cos\varphi}\sqrt{-1}$$

und

$$2t = -1 + \frac{\cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi}{1 - \cos\varphi}$$

erhalten und daher

$$s = \frac{\sin\varphi + \sin n\varphi - \sin(n+1)\varphi}{2(1 - \cos\varphi)}$$

und

$$t = -\frac{1}{2} + \frac{\cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi}{2(1 - \cos\varphi)}$$

§6 Es sei nun $\lambda = 2$ und wir wollen wiederum

$$s = \sin^2 \varphi + \sin^2 2\varphi + \ldots + \sin^2 n\varphi$$

oder

$$s = \int \sin^2 n\varphi$$

setzen und

$$t = \cos^2 \varphi + \cos^2 2\varphi + \ldots + \cos^2 n\varphi$$

oder

$$t = \int \cos^2 n\varphi;$$

weil nun

$$\sin^2 n\varphi = \frac{p^{2n} - 2p^n q^n + q^{2n}}{-4} = \frac{1}{2} - \frac{p^{2n} + q^{2n}}{4}$$

und

$$\cos^2 n\varphi = \frac{p^{2n} + 2p^n q^n + q^{2n}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{p^{2n} + q^{2n}}{4}$$

ist, werden wir diese Formeln

$$4s = 2\int 1 - \int (p^{2n} + q^{2n})$$

und

$$4t = 2\int 1 + \int (p^{2n} + q^{2n})$$

haben, wo, weil die Anzahl der Terme n ist, klar ist, dass $\int 1 = n$ sein wird; daher, weil $\alpha = 2$ ist, wird aus dem obigen

$$\int (p^{2n} + q^{2n}) = -1 + \frac{\cos 2n\varphi - \cos 2(n+1)\varphi}{1 - \cos 2\varphi}$$

sein, nach Einsetzen welcher Werte und der Teilung durch 4 wir

$$s = \frac{n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\cos 2n\varphi - \cos 2(n+1)\varphi}{4(1 - \cos 2\varphi)}$$

und

$$t = \frac{n}{2} - \frac{1}{4} + \frac{\cos 2n\varphi - \cos 2(n+1)\varphi}{4(1 - \cos 2\varphi)}$$

erhalten werden und daher ist sofort klar, dass $s + t = n$ sein wird, völlig wie es die Natur der Sache erfordert.

§7 Wir wollen nun $\lambda = 3$ setzen und diese zu summierenden Reihen so darstellen

$$s = \sin^3\varphi + \sin^3 2\varphi + \ldots + \sin^3 n\varphi$$

oder

$$s = \int \sin^3 n\varphi$$

und

$$t = \cos^3\varphi + \cos^3 2\varphi + \ldots + \cos^3 n\varphi$$

oder

$$t = \int \cos^3 n\varphi.$$

Weil nun

$$\sin^3 n\varphi = \frac{p^{3n} - 3p^{2n}q^n + 3p^n q^{2n} - q^{3n}}{-8\sqrt{-1}}$$

und

$$\cos^3 n\varphi = \frac{p^{3n} + 3p^{2n}q^n + 3p^n q^{2n} + q^{3n}}{8}$$

ist, erhalten wir daher wegen $pq = 1$

$$s = \frac{-1}{8\sqrt{-1}} \int (p^{3n} - q^{3n} - 3p^n + 3q^n) = \frac{-1}{8\sqrt{-1}} \int (p^{3n} - q^{3n}) + \frac{3}{8\sqrt{-1}} \int (p^n - q^n),$$

dann aber

$$t = \frac{1}{8} \int (p^{3n} + q^{3n}) + \frac{3}{8} \int (p^n + q^n).$$

Wenn wir daher nun die oben gefundenen Werte hier einsetzen, werden die beiden gesuchten Summen so ausgedrückt hervorgehen

$$s = \frac{-\sin 3\varphi - \sin 3n\varphi + \sin 3(n+1)\varphi}{8(1-\cos 3\varphi)} + \frac{3\sin\varphi + 3\sin n\varphi - 3\sin(n+1)\varphi}{8(1-\cos\varphi)}$$

$$t = -\frac{1}{2} + \frac{\cos 3n\varphi - \cos 3(n+1)\varphi}{8(1-\cos 3\varphi)} + \frac{3\cos n\varphi - 3\cos(n+1)\varphi}{8(1-\cos\varphi)}$$

§8 Wir wollen nun $\lambda = 4$ setzen und die zu summierenden Reihen so darstellen

$$s = \sin^4\varphi + \sin^4 2\varphi + \ldots + \sin^4 n\varphi$$

oder

$$s = \int \sin^4 n\varphi$$

und

$$t = \cos^4\varphi + \cos^4 2\varphi + \ldots + \cos^4 n\varphi$$

oder

$$t = \int \cos^4 n\varphi.$$

Weil also

$$\sin^4 n\varphi = \frac{p^{4n} - 4p^{3n}q^n + 6p^{2n}q^{2n} - 4p^n q^{3n} + q^{4n}}{16}$$

$$\cos^4 n\varphi = \frac{p^{4n} + 4p^{3n}q^n + 6p^{2n}q^{2n} + 4p^n q^{3n} + q^{4n}}{16}$$

ist, folgen wegen $pq = 1$ diese Werte

$$s = \frac{1}{16}\int(p^{4n} + q^{4n}) - \frac{1}{4}\int(p^{2n} + q^{2n}) + \frac{3}{8}\int 1$$

$$t = \frac{1}{16}\int(p^{4n} + q^{4n}) + \frac{1}{4}\int(p^{2n} + q^{2n}) + \frac{3}{8}\int 1;$$

nach Einsetzen dieser Werte, die wir oben gegeben haben, wird also

$$s = \frac{3n}{8} + \frac{3}{16} + \frac{\cos 4n\varphi - \cos 4(n+1)\varphi}{16(1-\cos 4\varphi)} - \frac{\cos 2n\varphi - \cos 2(n+1)\varphi}{4(1-\cos 2\varphi)}$$

und

$$t = \frac{3n}{8} - \frac{5}{16} + \frac{\cos 4n\varphi - \cos 4(n+1)\varphi}{16(1-\cos 4\varphi)} + \frac{\cos 2n\varphi - \cos 2(n+1)\varphi}{4(1-\cos 2\varphi)}$$

sein und so wird es leicht sein, auch größere Werte des Exponenten λ zu entwickeln.

§9 Wenn also nun gefragt wird, Summen von welcher Art daher hervorgehen werden, wenn diese Reihen ins Unendliche fortgesetzt werden, wird nicht geringe Umsicht zu lassen sein. Wenn nämlich zuerst der Exponent λ eine gerade Zahl war, ist ersichtlich, dass, nachdem für n eine unendliche Zahl genommen wurde, die Summen dieser Reihen auch unendlich groß sein werden; aber wenn λ eine ungerade Zahl war, dann gibt es nichts, was diese Summen ins Unendliche vermehren kann; die ganze Frage geht also darauf zurück, dass die Werte der Formeln $\sin n\alpha\varphi$ und $\cos n\alpha\varphi$ angegeben werden, wann immer für n unendliche große Zahlen angenommen werden; es ist aber klar, dass diese Werte in diesem Fall genauso von der Grenze $+1$ bis hin zur Grenze -1 variieren können, als wenn n eine endliche Zahl wäre; daher, wenn die Sache für sich betrachtet wird, lässt nicht sicher über diese Summen bestätigen, weil, welche Summe auch immer vorgezogen werden würde, wenn darüber hinaus einer oder mehrere Terme hinzuaddiert werde würden, eine völlig andere Summe hervorginge. Dennoch sind wiederum von berühmten Autor der vorhergehenden Dissertation die Summen in diesem Fall durch metaphysische Begründung sehr geistreich angegeben worden, mit denen wir in der Analysis vollkommen einverstanden sein können.

§10 Weil aber bei diesen Reihen genauso wie bei allen anderen nicht konvergenten die eigentliche Benennung der Summe keinen Platz finden kann, weil ja, wie viele Terme auch immer tatsächlich addiert werden, man dennoch niemals zu einer bestimmten Summe gelangen kann, so habe ich schon von langer Zeit auf strengste Begründungen gestürzt gelehrt, dass in diesen Fällen dem Namen der Summe eine andere für die Analysis geeignetere Berechnungsweise zugeteilt werden muss, welche neue Benennung ich glaube so festgesetzt werden zu müssen, dass die Summe jeder unendlichen Reihe, ob sie konvergent oder divergent war, mit der analytischen Formel bezeichnet wird, aus deren Entwicklung diese Reihen entstehen; und, nachdem diese Definition zugelassen worden ist, verschwinden alle Zweifel über Summationen dieser Art von selbst.

§11 Damit das klarer wird, wollen wir die erste oben verschaffte Summe

$$s = \sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \ldots + \sin n\varphi$$

betrachten, für die wir

$$\frac{\sin\varphi + \sin n\varphi - \sin(n+1)\varphi}{2(1-\cos\varphi)}$$

gefunden haben, in welchem Ausdruck die Formeln $\sin n\varphi$ und $\sin(n+1)\varphi$ wegen des letzten Terms eintreten; wenn daher also die Reihe in der Tat ins Unendliche fortgesetzt wird, gehen wegen keines letzten Terms auch diese Formeln von selbst heraus, sodass in diesem Fall

$$s = \frac{\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)},$$

welches auch die Formel selbst ist, aus deren Entwicklung diese Reihen gefunden wird; daher kann vermöge meiner Definition diese Formel mit recht für die Summe dieser Reihe gehalten werden, welches selber über die andere Reihe

$$t = \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos n\varphi$$

fest verhalten ist, für die wir

$$t = -\frac{1}{2} + \frac{\cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi}{2(1-\cos\varphi)}$$

gefunden haben; nachdem nämlich das letzte Glied weggelassen worden ist, das ja von dem letzten Term abhängt, wird die Summe durch meine Summe jedenfalls $t = -\frac{1}{2}$; weil das letzte so leicht klar ist, ist zu bemerken, dass dieser Wert aus der Formel

$$t = \frac{\cos\varphi - 1}{2(1-\cos\varphi)}$$

entsteht, welcher Wert der vorgelegten Reihe gleich zu sein so gezeigt werden kann: man multipliziere auf beiden Seiten mit $2 - 2\cos\varphi$ und es wird

$$\begin{aligned}\cos\varphi - 1 =& 2\cos\varphi + 2\cos 2\varphi + 2\cos 3\varphi + 2\cos 4\varphi + \text{etc}\\ &-2\cos^2\varphi - 2\cos\varphi\cos 2\varphi - 2\cos\varphi\cos 3\varphi - \text{etc}\end{aligned}$$

werden müssen; und weil nun vom Allgemeinen $2\cos a\cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$ ist, wird

$$\begin{aligned}&2\cos^2\varphi = 1 + cos 2\varphi\\ &2\cos\varphi\cos 2\varphi = \cos\varphi + \cos 3\varphi\\ &2\cos\varphi\cos 3\varphi = \cos 2\varphi + \cos 4\varphi\\ &2\cos\varphi\cos 4\varphi = \cos 3\varphi + \cos 5\varphi\\ &2\cos\varphi\cos 5\varphi = \cos 4\varphi + \cos 6\varphi\\ &2\cos\varphi\cos 6\varphi = \cos 5\varphi + \cos 7\varphi\\ &etc\end{aligned}$$

sein, nach Einsetzen welcher Werte die Gleichheit natürlich ins Auge springt; es wird nämlich

$$\begin{aligned}\cos\varphi - 1 = 2\cos\varphi + 2\cos 2\varphi + 2\cos 3\varphi + 2\cos 4\varphi + \text{etc}\\ -1 - \cos\varphi - \cos 2\varphi - \cos 3\varphi - \cos 4\varphi - \text{etc}\\ - \cos 2\varphi - \cos 3\varphi - \cos 4\varphi - \text{etc}\end{aligned}$$

sein.

§12 Nachdem dieselben Überlegungen auch für den Fall $\lambda = 3$ gemacht worden sind, in welchem wir

$$s = \sin^3\varphi + \sin^3 2\varphi + \sin^3 3\varphi + \sin^3 4\varphi + \text{etc} \quad \text{ins Unendliche}$$

und

$$t = \cos^3\varphi + \cos^3 2\varphi + \cos^3 3\varphi + \cos^3 4\varphi + \text{etc} \quad \text{ins Unendliche}$$

haben, werden die Summen dieser unendlichen Reihen so ausgedrückt sein

$$s = -\frac{\sin 3\varphi}{8(1-\cos 3\varphi)} + \frac{3\sin\varphi}{8(1-\cos\varphi)}$$

und

$$t = -\frac{1}{2};$$

hier ist freilich nicht so klar, dass die Entwicklung dieser Formeln auf diese Reihen führt, nichtsdestoweniger ist gewiss, dass eine vollkommene Gleichheit Geltung hat, was Sie, die in dieser Art an Rechnungen hinreichend geübt sind, erkennen werden. Dennoch wird es wiederum förderlich sein, die Gültigkeit der zweiten Summation auf diese Weise gezeigt zu haben. Weil

$$\cos^3 a = \frac{3}{4}\cos a + \frac{1}{4}\cos 3a$$

ist, wird diese Reihe in die zwei folgenden aufgelöst

$$\begin{aligned}t =& \frac{3}{4}(\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \text{etc})\\ &+\frac{1}{4}(\cos 3\varphi + \cos 6\varphi + \cos 9\varphi + \text{etc});\end{aligned}$$

die Summe der ersten Reihe ist aber aus dem vorhergehenden

$$\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8},$$

die Summe der zweiten ist aber wegen derselben Begründung

$$\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8},$$

woher beide zusammengenommen die Summe $-\frac{1}{2}$ ergeben.

Allgemeine Summation anderer unendlicher Progressionen, die zu dieser Art zu zählen sind

Theorem

Wenn die Summation dieser Progression

$$Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots + Nz^n$$

bekannt war, dann werden sich auch immer diese Progressionen summieren lassen

$$S = Ax \sin\varphi + Bx^2 \sin 2\varphi + Cx^3 \sin 3\varphi + \ldots + Nx^n \sin n\varphi$$

und

$$T = Ax \cos\varphi + Bx^2 \cos 2\varphi + Cx^3 \cos 3\varphi + \ldots + Nx^n \cos n\varphi.$$

Beweis

Weil die Summe der Progression

$$Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots + Nz^n$$

eine bestimmte Funktion der variablen Größe z ist, bezeichne man diese mit dieser Formel $\triangle$: z; dann wird man aber, in dem man wie zuvor

$$p = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$$

und

$$q = \cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi$$

setzt, dass

$$\sin n\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(p^n - q^n)$$

und

$$\cos n\varphi = \frac{1}{2}(p^n + q^n)$$

wird, wenn diese Formeln in die vorgelegten Reihen eingesetzt werden, deren Summen so ausgedrückt erhalten

$$2S\sqrt{-1} = \triangle\colon px - \triangle\colon qx$$

und

$$2T = \triangle\colon px + \triangle\colon qx,$$

wozu bemerkt ist, dass in jeder der beiden Formeln sich die imaginären Größen, die die Buchstaben p und q involvieren, von selbst aufheben, sodass für die Summe S und T alle Werte hervorgehen werden; und diese Summation wird genauso gelingen, ob die vorgelegte Reihen ins Unendliche fortschreiten oder irgendwo begrenzt werden.

Beispiel 1

Es seien alle Koeffizienten $A, B, C, \ldots = 1$ und die Reihe werde ins Unendliche fortgesetzt; und es wird

$$\triangle\colon z = \frac{z}{1-z}$$

sein, daher wird man also für die erste Reihe

$$S = x \sin\varphi + x^2 \sin 2\varphi + x^3 \sin 3\varphi + x^4 \sin 4\varphi + \ldots \quad \text{ins Unendliche}$$

den Ausdruck

$$2S\sqrt{-1} = \frac{px}{1-px} - \frac{qx}{1-qx} = \frac{(p-q)x}{1-(p+q)x+pqx^2}$$

haben, welcher wegen

$$p - q = 2\sqrt{-1}\sin\varphi$$

und

$$p + q = 2\cos\varphi$$

und $pq = 1$

$$S = \frac{x\sin\varphi}{1-2x\cos\varphi+x^2}$$

liefern wird. Aber für die andere Reihe

$$T = x\cos\varphi + x^2\cos 2\varphi + x^3\cos 3\varphi + x^4\cos 4\varphi + \ldots \quad \text{ins Unendliche}$$

wird

$$2T = \frac{px}{1-px} + \frac{qx}{1-qx} = \frac{(p-q)x - 2pqx^2}{1-(p+q)x+pqx^2}$$

werden oder

$$T = \frac{x\cos\varphi - x^2}{1-2x\cos\varphi+x^2}.$$

Korollar 1

Daher entstehen also, wenn $x = 1$ ist, die oben gegebenen Summationen, natürlich

$$S = \frac{\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)} = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\varphi$$

und

$$T = -\frac{1}{2},$$

welcher Fall umso bemerkenswerter ist, weil die einzelnen Terme variable Größen sind, obwohl dennoch die Summe eine konstante Größe ist.

Korollar 2

Es wird sich aber im Allgemeinen die Größe x immer so annehmen lassen, dass die Summe einer gegebenen Größe gleich a wird; für die Reihe der Sinusse wird aber

$$\frac{x\sin\varphi}{1-2x\cos\varphi+x^2} = a$$

sein, und wenn daher der Buchstabe x bestimmt wird, wird sicher

$$a = x\sin\varphi + x^2\sin 2\varphi + x^3\sin 3\varphi + \dots$$

sein und wenn auf die gleiche Weise

$$\frac{x\cos\varphi - x^2}{1-2x\cos\varphi+x^2} = a$$

gesetzt wird, findet man daraus den Wert des Buchstaben x; es wird auch

$$a = x\cos\varphi + x^2\cos 2\varphi + x^3\cos 3\varphi + \dots$$

sein.

Beispiel 2

Es sei nun

$$\triangle\colon z = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 + \dots \quad \text{ins Unendliche} = \log\frac{1}{1-z},$$

sodass die vorgelegten Reihen nun

$$S = x\sin\varphi + \frac{1}{2}x^2\sin 2\varphi + \frac{1}{3}x^3\sin 3\varphi + \dots$$

und

$$T = x\cos\varphi + \frac{1}{2}x^2\cos 2\varphi + \frac{1}{3}x^3\cos 3\varphi + \dots$$

sind; wir werden

$$2S\sqrt{-1} = \log\frac{1}{1-px} - \log\frac{1}{1-qx} = \log\frac{1-qx}{1-px}$$

oder

$$2S\sqrt{-1} = \frac{1 - x\cos\varphi + x\sqrt{-1}\sin\varphi}{1 - x\cos\varphi - x\sqrt{-1}\sin\varphi}$$

haben, für die Reduktion welcher Formel man diese Formel betrachte

$$\log\frac{f + q\sqrt{-1}}{f - g\sqrt{-1}},$$

von welcher bekannt ist, wenn man

$$\frac{g}{f} = \tan\omega$$

setzt, dass der Logarithmus gleich $2\omega\sqrt{-1}$ sein wird; daher suche man also den Winkel ω, dass

$$\tan\omega = \frac{x\sin\varphi}{1 - x\cos\varphi}$$

ist, woher weiter

$$S = \omega$$

folgt. Für die andere Progression hat man, weil

$$2T = \log\frac{1}{1-px} + \log\frac{1}{1-qx} = -\log(1 - 2x\cos\varphi + x^2)$$

ist,

$$T = -\frac{1}{2}\log(1 - 2x\cos\varphi + x^2)$$

Korollar 3

Weil also für die erste Progression

$$\frac{x\sin\varphi}{1-x\cos\varphi}=\tan\omega$$

ist, findet man daher

$$x=\frac{\tan\omega}{\sin\varphi+\cos\varphi\tan\omega}=\frac{\sin\omega}{\sin(\varphi+\omega)},$$

nach Einsetzen welches Wertes wir diese der Aufmerksamkeit höchst würdige Summation erhalten

$$\omega=\frac{\sin\omega\sin\varphi}{\sin(\varphi+\omega)}+\frac{\sin^2\omega\sin 2\varphi}{2\sin^2(\varphi+\omega)}+\frac{\sin^3\omega\sin 3\varphi}{3\sin^3(\varphi+\omega)}+\frac{\sin^4\omega\sin 4\varphi}{4\sin^4(\varphi+\omega)}+\dots$$

Wenn dort $\omega=\frac{\pi}{2}$ ist, sodass $\sin\omega=1$ und $\sin(\varphi+\omega)=\cos\varphi$, entsteht diese besonders gefällige Summation

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\sin\varphi}{1\cos\varphi}+\frac{\sin 2\varphi}{2\cos^2\varphi}+\frac{\sin 3\varphi}{3\cos^3\varphi}+\dots,$$

welche Reihe ich schon einst in „Calculo differentiali“ aus verschiedensten Prinzipien erhalten habe; diese war umso bemerkenswerter erschienen, weil, wie auch immer der Winkel φ angenommen wird, die Summe der Reihe immer gleich $\frac{\pi}{2}$ bleibt.